МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 514.862

DOI 10.31471/1993-9981-2020-1(44)-138-143

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВИТКУ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНОЇ СИТУАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПОШИРЕННЯ COVID-19

А. П. Олійник, Л. І. Фешанич, Є. А. Олійник
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: andriioliiny@gmail.com

У роботі розглядаються математичні моделі розвитку та поширення епідемій. Такі моделі базуються на апараті задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь із широким класом початкових умов. Розроблено та обґрунтовано методику вибору коефіцієнтів системи, описано їх зміст та вплив на параметри системи. Запропоновано та обґрунтовано методику задання початкових умов задачі. Проаналізовано різні варіанти моделей епідемій на етапі опису ситуації з поширенням COVID-19 обгрунтовано доцільність вибору апарату систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь без урахуванням загаювання аргументів через необхідність розробки експрес-методу моделювання процесу поширення епідемій. Напрямок математичного моделювання епідеміологічних ситуацій розвинуто шляхом врахування засобів лікування, впливу на розвиток епідемій економічної ситуації в країні, наявності інших факторів позитивного (рівня комунікації населення, його мобільності, методики лікування, освіченості населення, кліматичних впливів, сезонних особливостей тощо) та негативного впливу (стихійних лих, політичної ситуації в країні). З точки зору математичного моделювання проаналізовано значення коефіцієнтів та їх динаміку, виявлено межі їх зміни для ефективного опису та прогнозування розвитку процесів, що моделюються.

Для чисельної реалізації моделі використано методи Рунге-Кутта, точність яких вибирається з урахуванням особливостей модельованих процесів У роботі створено програмний комплекс для реалізації моделей мовою С++ та з використанням стандартних програмних пакетів. Розрахунки підтвердили ефективність пропонованої моделі для опису епідемій і пандемій інфекцій та вірусів різної природи, вона точно описує якісну поведінку систем і процесів, що вивчаються, Встановлено, що всі коефіцієнти моделі якісно точно описують їх вплив на поведінку моделі вцілому, відображають об'єктивні тенденції, що спостерігаються при детальному вивченні поширення COVID-19 в Китаї та в Європі. Визначено напрями можливих подальших досліджень.

Ключові слова: епідемії вірусних інфекцій, моделювання, системи коефіцієнтів, диференціальні рівняння, чисельні методи реалізації.

В работе рассматриваются математические модели и развития и распространения эпидемий. Такие модели базируются на аппарате задач Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с широким классом начальных условий. Разработаны и обоснованы методика выбора коэффициентов системы, описаны их содержание и влияние на параметры системы. Предложена и обоснована методика задания начальных условий задачи. Проанализированы различные варианты моделей эпидемий, на этапе описания ситуации с распространением COVID-19 обоснована целесообразность выбора аппарата систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений без учета загаювання аргументов за необходимость разработки экспресс-метода моделирования процесса распространения эпидемий. Направление математического моделирования эпидемиологических ситуаций развито путем учета средств лечения, влияния на развитие эпидемий экономической ситуации в стране, наличия других факторов положительного (уровень коммуникации населения, его мобильности, методики лечения, образованности населения, климатических воздействий, сезонных особенностей и т.д.) и отрицательного воздействия (стихийных бедствий, политической ситуации в стране). С точки зрения математического моделирования проанализировано значение коэффициентов и их динамика, обнаружены пределы их изменения для эффективного описания и прогнозирования развития моделированных процессов.

Для численной реализации модели использованы методы Рунге-Кутта, точность которых выбирается в учетом особенностей моделируемых процессов. В работе создан программный комплекс для реализации моделей на языке С ++ и с использованием стандартных программных пакетов. Расчеты подтвердили эффективность предлагаемой модели для описания эпидемий и пандемий инфекций и вирусов различной природы: она точно описывает качественное поведение изучаемых систем и процессов. Установлено, что все коэффициенты модели качественно точно описывают их влияние на поведение модели в целом, отражают объективные тенденции, наблюдаемые при детальном изучении распространения COVID-19 в Китае и в Европе Определены направления возможных дальнейших исследований.

Ключевые слова: эпидемии вирусных инфекций, моделирование, системы коэффициентов, дифференциальное уравнение, численные методы реализации.

The paper deals with mathematical models of epidemic development and spread. Such models are based on the Cauchy apparatus for nonlinear ordinary differential equations with a wide class of initial conditions. The methodology for selecting the system coefficients is developed and substantiated, their content and influence on the system parameters are described. The method of setting the initial conditions of the problem is proposed and substantiated. Different variants of epidemic models have been analyzed, at the stage of describing the situation with COVID-19 spread, the expediency of choosing the apparatus of systems of nonlinear ordinary differential equations without taking into account argumentation due to the need to develop an express method of simulating the epidemic propagation process is substantiated. The direction of mathematical modeling of epidemiological situations was developed by taking into account the treatment means, influencing the development of epidemics of the economic situation in the country, the presence of other factors positive (the level of communication of the population, its mobility, treatment methods, education of the population, climatic influences, seasonal effects, etc.) and negative factors. distress, political situation in the country). From the point of view of mathematical modeling, the values of the coefficients and their dynamics are analyzed, the limits of their change are revealed for the efficient description and forecasting of the development of the simulated processes.

The numerical implementation of the model uses Runge-Kutta methods, the accuracy of which is selected in the light of the peculiarities of the simulated processes. The calculations confirmed the effectiveness of the proposed model for describing epidemics and pandemics of infections and viruses of various nature, it accurately describes the qualitative behavior of the systems and processes under study, found that all the coefficients of the model accurately describe their impact on the behavior of the model as a whole, reflect trends observed in the detailed study of the spread of COVID-19 in China and Europe Directions for possible further research have been identified.

Keywords: viral infections epidemics, modeling, coefficient systems, differential equations, numerical implementation methods.

Вступ

В останні десятиліття у багатьох країнах світу спостерігаємо численні спалахи як «новітніх» епідемій, викликаних раніше невідомими чи малодослідженими вірусами (пташиний грип, свинячий грип, атипова пневмонія, лихоманка Ебола), так і відновленням епідемій здавалося б вже подоланих захворювань, відомих у попередні десятиліття (туберкульоз, чума та ін.). Крім того, необхідно досліджувати і перебіг традиційних інфекцій, наприклад, щорічних епідемій гострих респіраторних захворювань і грипу.

Проте найсерйознішим випробуванням стала пандемія COVID-19, що охопила практично всю планету і призвела до глибоких катастрофічних наслідків для світової системи охорони здоров’я, економічних, транспортних, гуманітарних комплексів більшості країн світу.

Епідеміологи в процесі наукової і практичної діяльності у більшості застосовують комплексну методику вивчення об’єкта. Епідеміологічний процес вивчають переважно шляхом спостереження. Сам процес виявлення й епідеміологічного обстеження кожного конкретного випадку інфекційної хвороби потребує застосування методів спостереження в осередках хвороби, зокрема, можливості інфікування деякими хворобами, простеження тривалості імунітету після перенесеної інфекції, а також спеціальних методів.

Для того, щоб уявити загальну картину захворюваності, оцінити розвиток епідемічного процесу в часі, поширеність його на певній території, зібраний матеріал необхідно обробити математичним способом, отримавши при цьому основні статистичних показників [1,2, 4-5, 8, 12-16]. Попри велику цінність статистичного дослідження, для вирішення багатьох епідеміологічних питань його іноді буває недостатньо.

Основний зміст роботи

Математичне моделювання – засіб, що дозволяє досягти значно більшої точності, ніж описові методи. Математична модель дає частковий опис певних аспектів реальної дійсності, а її істинність цілком залежить від точності цього зображення [5, 8].

Модель епідемії інфекційної хвороби дозволяє оцінити динаміку зміни кількості здорового, інфікованого та такого, що має імунітет до даної інфекції населення, і можне бути записана за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь [1, 15, 16]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t-\tau_2) + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t) - f_1(t), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2(t) - x_2(t-\tau_2) + f_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = N_0, \quad x_2(0) = N_1, x_3(0) = x_4(0) = 0. \quad (2)$$

де

$$f_1(t) = \frac{c_1}{\left(t - t_1/2\right)^2 + 1},$$

$$f_2(t) = \frac{c_2}{(t - t_2)^2 + 1},$$

x_1 – кількість здорового населення; x_2 – кількість інфікованого населення; x_3 – кількість населення, яке має імунітет до даного типу інфекції; τ_1 – час інкубаційного періоду хвороби; τ_2 – час, протягом котрого набутий організмом імунітет до хвороби втрачається;

Функції $f_1(t), f_2(t)$ обираються неперервними, спадаючими до нуля при $t \to +\infty$; $c_1(t),\ c_2(t)$ – коефіцієнти, що моделюють інтенсивність впливів. Легко перевірити, що функції $f_1(t), f_2(t)$ мають єдиний максимум, який, з точки зору моделювання відповідних процесів, припадає на максимум розвитку епідемії (кількості людей, що захворіли).

Проте вказана модель є досить детальною, вона розглядає динаміку розвитку епідемій в часі, з можливими їх циклічними повторами, тоді як при моделюванні пандемії COVID-19 доцільно скористатись моделями одного циклу, що базуються на відомих результатах [4, 13-16].

Розглядається наступна модель: нехай $y_1(t)$ - кількість здорового населення, $y_2(t)$- кількість людей, уражених вірусом, $y_3(t)$- кількість пацієнтів, що виздоровіли та набули імунітету, $y_4(t)$- людські втрати в процесі пандемії. Тоді для опмсу динамік пандемії використовується наступна система:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -k_1 y_1(t) y_2(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1(t) y_2(t) - k_2 y_2(t) \\ \dfrac{dy_3}{dt} = k_3 y_2(t) \\ \dfrac{dy_4}{dt} = \varepsilon y_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

з початковими умовами

$$y_1(t) = N_0, y_2(t) = n, y_3(t) = 0, = 0. \quad (4)$$

Коефіцієнт k_1 характеризує рівень взаємодії, контактів, зустрічей здорових та інфікованих людей, при цьому моделюється рівень протиепідеміологічних заходів, які впроваджуються урядами постраждалих країн з метою недопущення таких небажаних взаємодій, значення цього коефіцієнту тим менше, чим ефективнішими є проти епідеміологічні заходи, коефіцієнт k_2 встановлює, що рівень поширення вірусу знижується по мірі того, скільки людей заразились, його величина також залежить від того, наскільки ефективними є протиепідеміологічні заходи в плані недопущення контактів зі здоровим людьми та ефективності лікування, коефіцієнт

k_3 характеризує здатність особин, що перехворіли, до вироблення антитіл до вказаного вірусу – при пандемії COVIN-19 повідомлялось про повторні захворювання людей, що вилікувались від коронавірусу, коефіцієнт ε характеризує смертність від інфекції. Важливого значення набуває вивчення величин N_0 та *n*, які характеризують відповідно кількість населення країни та початкове число інфікованих, що потрапило на її територію в момент першого прояву інфекції в даній країні.

Результати розрахунків та їх аналіз.

Для розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь виду виду::

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad u(0) = u_0, \qquad (5)$$

до якого може бути зведена система (3), використано методи Рунге-Кутта різного порядку точності в залежності від необхідного рівня точності розв'язку, наприклад [7, 9,10], де:

а) метод другого порядку точності:

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \quad k_2 = f\left(t_n + 0{,}5\tau,\ y_n + 0{,}5\tau k_1\right), \quad y_{n+1} = y_n + \tau k_2;$$

б) метод третього порядку точності:

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \quad k_2 = f\left(t_n + 0{,}5\tau,\ y_n + 0{,}5\tau k_1\right), \quad k_3 = f\left(t_n + \tau,\ y_n - \tau k_1 + 2\tau k_2\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right);$$

в) метод четвертого порядку точності:

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \quad k_2 = f\left(t_n + 0{,}5\tau,\ y_n + 0{,}5\tau k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + 0{,}5\tau,\ y_n + 0{,}5\tau k_1\right), \quad k_4 = f\left(t_n + \tau,\ y_n + \tau k_3\right), \qquad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$$

Тут: τ – крок по часу, який вибирається з міркувань точності,

t_n, y_n – відповідно значення часу та вектора розв'язання в момент часу *n*.

Проведено широкий клас розрахунків, а саме:

1. Встановлено, що при *n=0* розв'язком системи (4) є сталі величини, що відповідає реальному змісту задачі – епідемія не буде поширюватись при відсутності її носіїв в даному регіоні;

2. Проведено дослідження залежності розв'язку від значення коефіцієнта k_1 - на рисунках 1 та 2 наведено результати розв'язку при $k_1 = 0.1$, $k_1 = 0.5$,

3. Досліджено залежність процесу від початкової кількості носіїв вірусу: N_0 = 10, *n* = 0.1 – рис.1, N_0 = 10, *n* = 1.0 – рис.3, N_0 = 10, *n* = 1,5 – рис.4. При інших однакових значеннях параметрів задачі рис.1 (k_1 = 0.1) демонструє менш інтенсивний темп поширення епідемії, ніж при k_1 = 0.5, що ілюструє рис.2 – при k_1 = 0.1 меншою є і загальна кількість осіб, що заразились, і темп розвитку епідемії, і кількість хворих;

4. Проведено дослідження залежності $y_2(t)$, $y_2(t), y_3(t)$, $y_4(t)$ від параметра k_2 (рис.5 та 6).

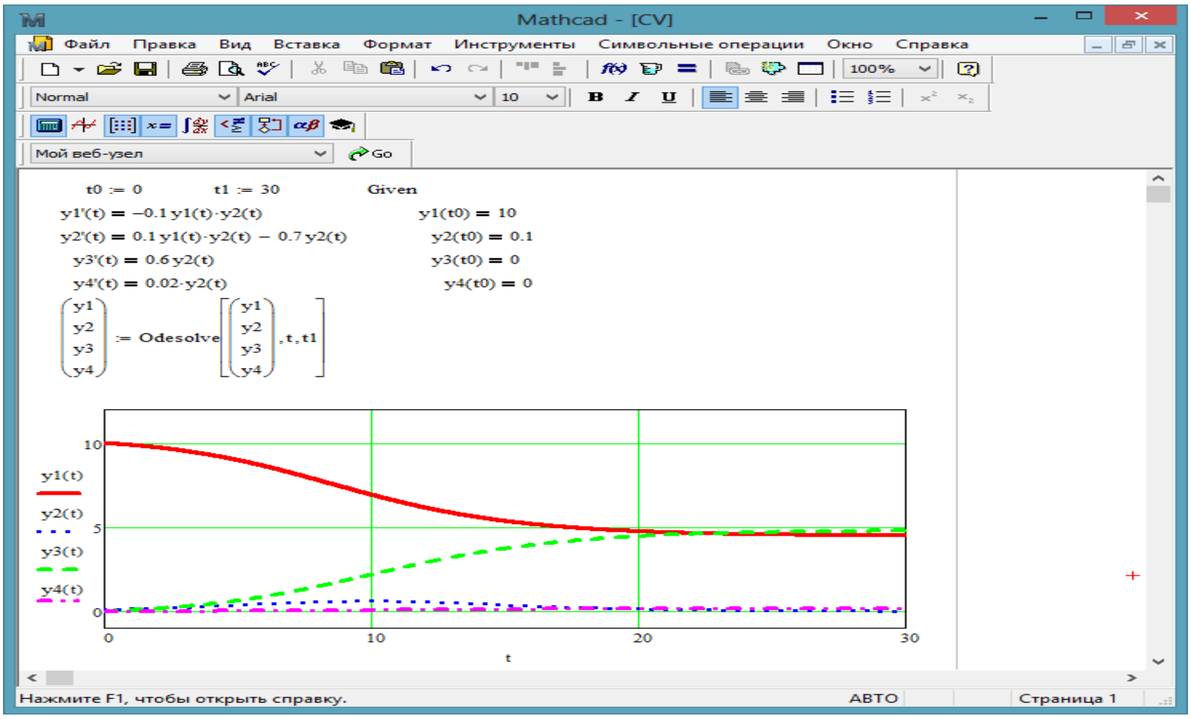


Рисунок 1 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t), y_3(t)$, $y_4(t)$ при $k_1 = 0.1$, n=0.1.

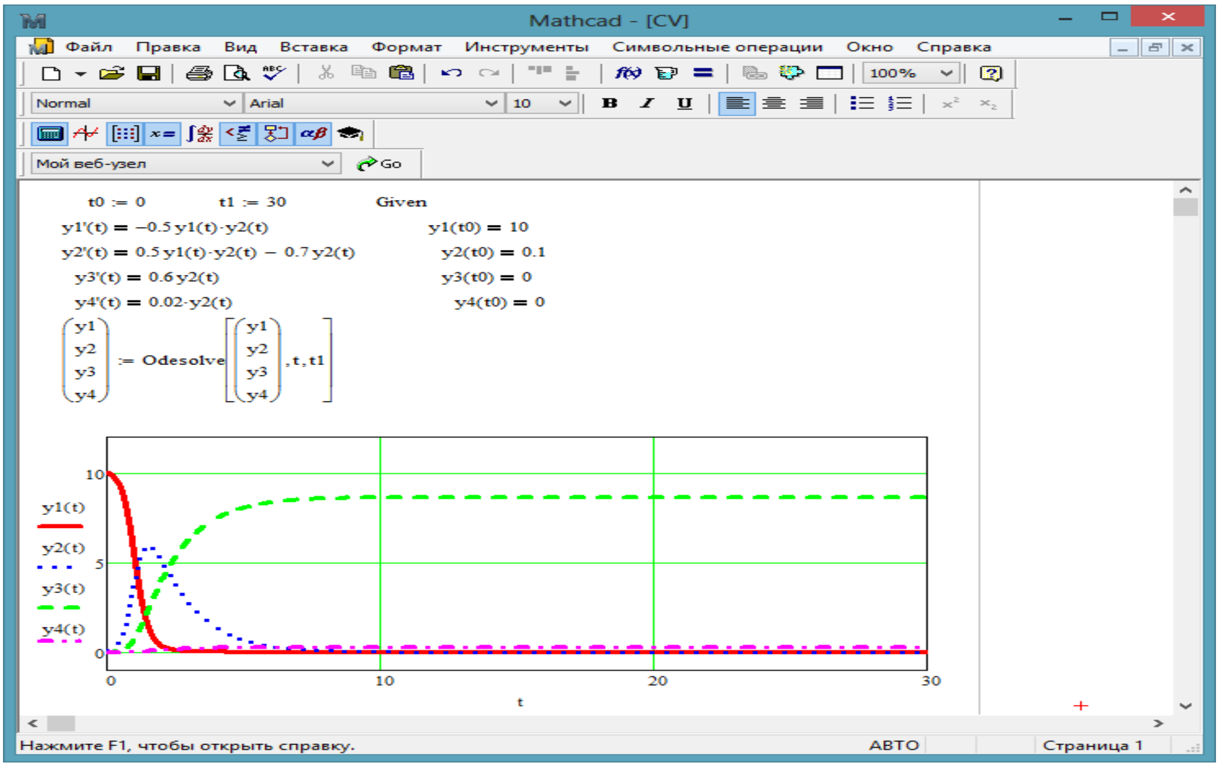


Рисунок 2 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t), y_3(t)$, $y_4(t)$ при $k_1 = 0.5$

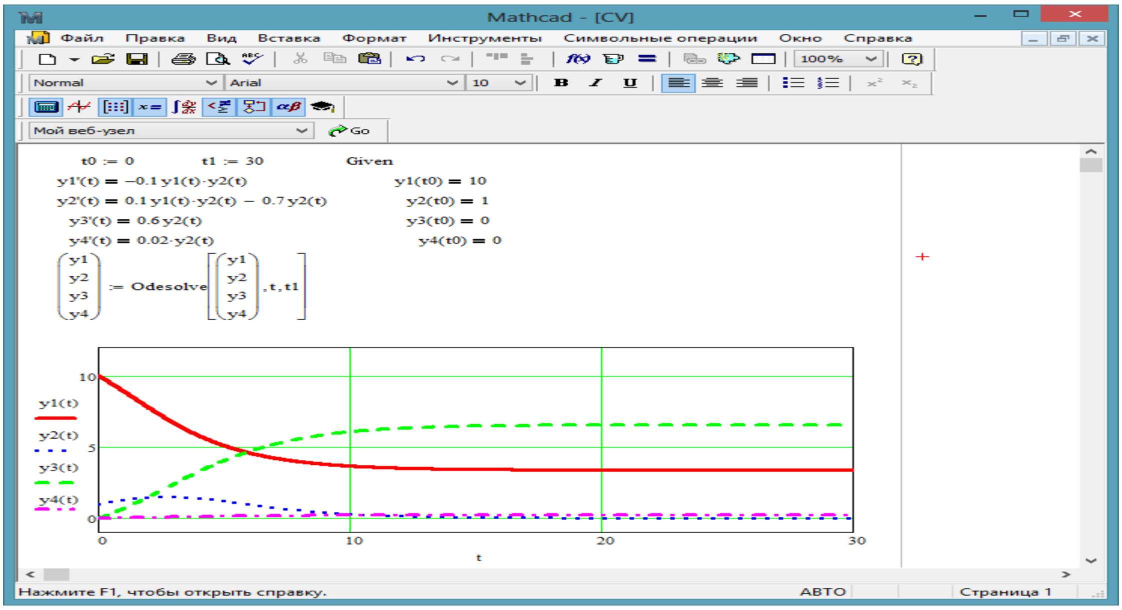


Рисунок 3 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t), y_3(t)$, $y_4(t)$ **при** $k_1 = 0.1$, ***n=1.0***

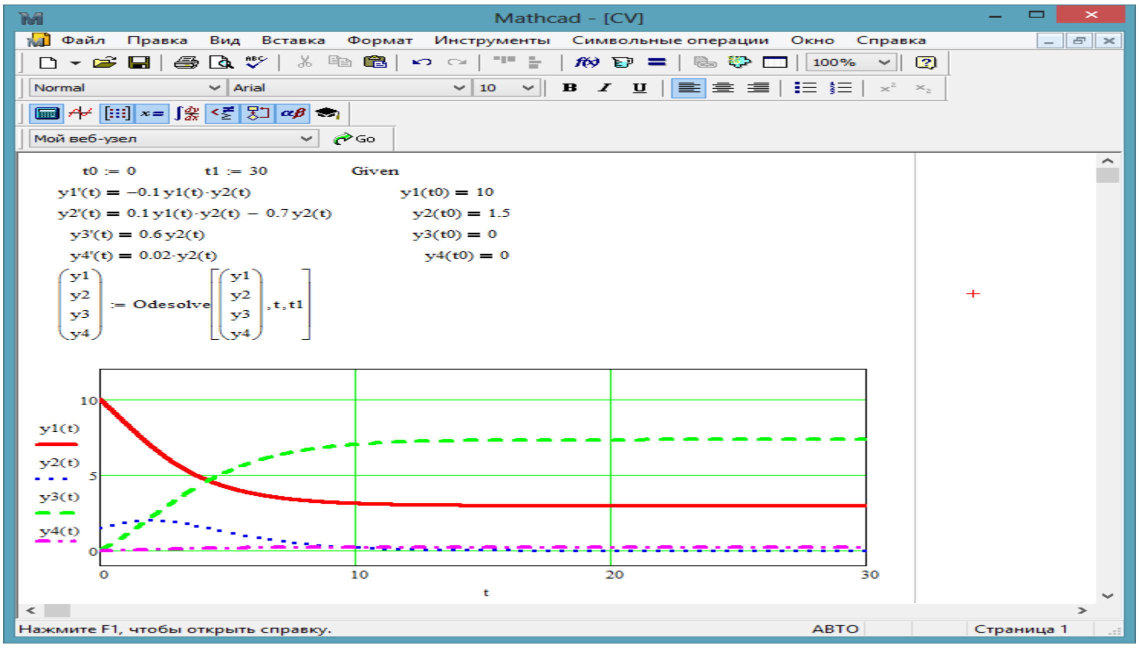
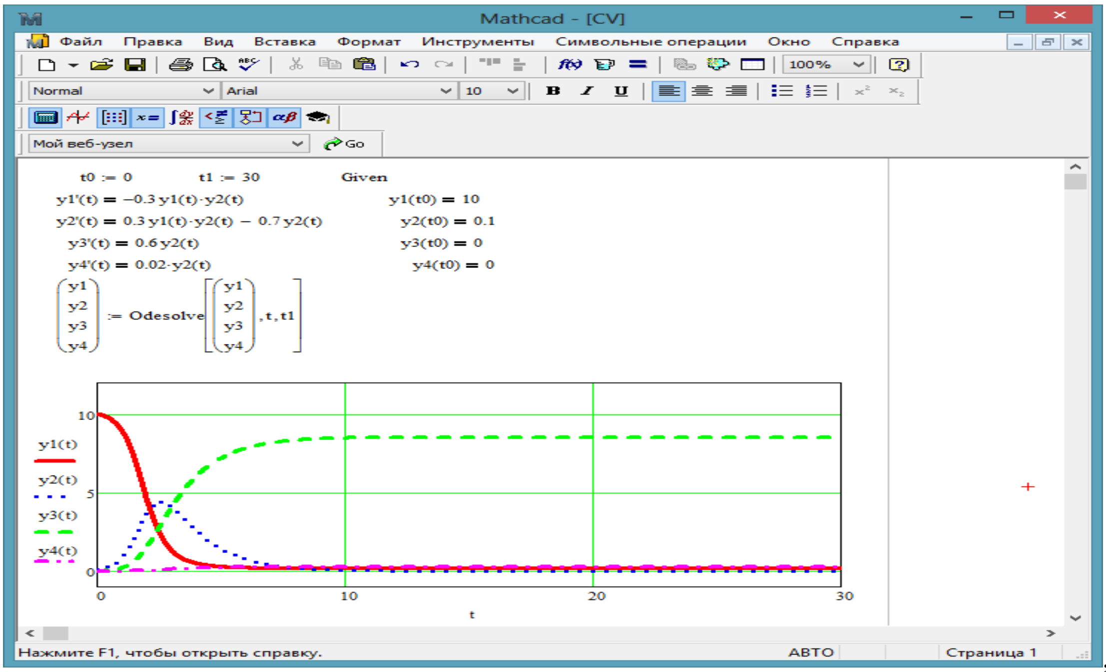


Рисунок 4 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t), y_3(t)$, $y_4(t)$ **при** $k_1 = 0.1$, ***n=1.5***

ISSN 1993-9981 print
ISSN 2415-3575 online



,

Рисунок 5 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ **при** k_2**=0.7, *n*=.**

1

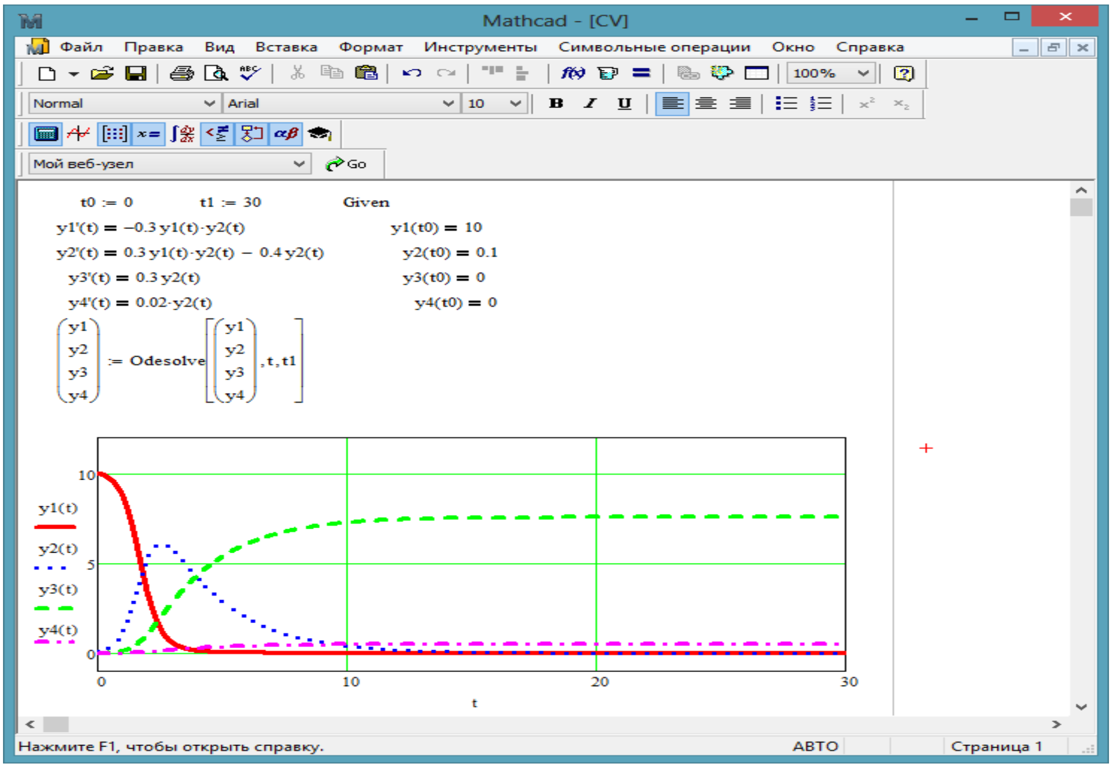


Рисунок 6 – Розподіл величин $y_2(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ **при** k_2**=0.4, *n=0/1***

При k_2=0.7 рівень захворюваності нижчий, ніж при k_2=0.4 – що відповідає допущенню про те, що k_2 характеризує ефективність системи охорони здоров'я в плані боротьби з епідемією.

Висновки.

За результатами проведених розрахунків можна зробити наступні висновки:

- розрахунки підтвердили ефективність пропонованої моделі для опису епідемій та пандемій інфекцій та вірусів різної природи, вона точно описує якісну поведінку систем і процесів, що вивчаються;
- всі коефіцієнти моделі якісно точно описують їх вплив на поведінку моделі вцілому, відображають об'єктивні тенденції, що спостерігаються при детальному вивченні поширення COVID-19 в Китаї та в Європі;
- реально проведено великі серії розрахунків, які підтверджують адекватність моделі та вибору коефіцієнтів, навести всі чисельні результати в одній роботі неможливо через обмеження по розміру публікації;
- всі наведені чисельні результати стосуються умовних одиниць, напрямок подальшого дослідження може бути пов'язаний з переходом до реальних кількісних параметрів систем.

Список використаних джерел

1. Бабский В.Г., Мышкис А. Д. Математические модели в биологии, связанные с учетом последействия / В. Г. Бабский. М. Мир, 1983. 383 с.

2. Беляков В. Д., Кравцов Ю. В. , Герасимов Л. Н. Состояние и перспектива математического моделирования в эпидемиологии. *Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунобиологии.* 1990. № 6. С. 109–113.

3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. : Наука, 1976. 286 с.

4. Марчук И. Г. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты. М. : Наука, 1991. 304 с.

5. Романюха А. А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 293 с.

6. Самойленко А. М., Перестюк М. О. , Парасюк І. О. . Диференціальні рівняння. К. : Либідь, 2003. 600 с.

7. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К. : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.

8. Хусаінов Д. Я., Шатирко А. В. Введення в моделювання динамічних систем. І. І. Харченко. К. : КНУ ім. Тарас Шевченка, 2010. 130 с.

9. Шахно С. М., Дудикевич А. Т., Левицька С. М. . Практикум з чисельних методів. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 432 с.

10. Эдвардс Ч. Г. Пенни Д. Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. М. : ООО "И. Д. Вильямс", 2008. 1104 с.

11. Bocharov G., Rihan F. A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2000. Vol. 125. P. 183–199.

12. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Spinger, 2012. 508 p.

13. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990. 512 с.

14. Andriy Oliynyk, Eugene Oliynyk, Olexandr Pyptiuk, Róża Dzierżak, Małgorzata Szatkowska, Svetlana Uvaysova, Ainur Kozbekova. The human body metabolism process mathematical simulation based on Lotka-Volterra model. Proc. SPIE 10445, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2017 104453L (7 August 2017); doi: 10.1117/12.2280972. 7 p.

15. Олійник А.П., Олійник Є.А. Математичне моделювання процесів обміну речовин в організмі людини та його програмна реалізація. *Методи та прилади контролю якості*. 2017. №1(38). С. 112-118.

16. Олийник Е. А., Гой Т. П. Математическое моделирование эпидемиологических процессов с помощью дифференциальных уравнений с

запаздывающим аргументом. Материалы Междунар. молодежного симпозиума «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения», 17–20 нояб. 2015 г. Воронеж : ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2015. С. 34–37.

References

1. Babskiy V.G., Myishkis A. D. Matematicheskie modeli v biologii, svyazannyie s uchetom posledeystviya. M. Mir, 1983. 383 p. [in Russian]

2. Belyakov V. D., Kravtsov Yu. V. , Gerasimov L. N. Sostoyanie i perspektiva matematicheskogo modelirovaniya v epidemiologii. Zhurnal mikrobiologii, epidemiologii i immunobiologii. 1990. No 6. P. 109–113. [in Russian]

3. Volterra V. Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovanie. M. : Nauka, 1976. 286 p. [in Russian]

4. Marchuk I. G. Matematicheskie modeli v immunologii: vyichislitelnyie metodyi i eksperimentyi. M. : Nauka, 1991. 304 p. [in Russian]

5. Romanyuha A. A. Matematicheskie modeli v immunologii i epidemiologii infektsionnyih zabolevaniy. M. : BINOM. Laboratoriya znaniy, 2012. 293 p. [in Russian]

6. Samoylenko A. M., Perestyuk M. O. , Parasyuk I. O. . DiferentsIalni rivnyannya. K. : LibId, 2003. 600 p. [in Ukrainian]

7. Feldman L. P., Petrenko A. I., DmitrIEva O. A. Chiselni metody v informatitsi. K. : Vidavnicha grupa BHV, 2006. 480 p. [in Ukrainian]

8. HusaInov D. Ya., Shatirko A. V. Vvedennya v modelyuvannya dinamIchnih sistem. I. I. Harchenko. K. : KNU Im. Taras Shevchenka, 2010. 130 p. [in Russian]

9. Shahno S. M., Dudikevich A. T., Levitska S. M. . Praktikum z chiselnih metodiv. LvIv : LNU Imeni Ivana Franka, 2013. 432 p. [in Ukrainian]

10. Edvards Ch. G. Penni D. E. Differentsialnyie uravneniya i kraevyie zadachi: modelirovanie i vyichislenie s pomoschyu Mathematica, Maple i MATLAB. M. : OOO "I. D. Vilyams", 2008. 1104 p. [in Russian]

11. Bocharov G., Rihan F. A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125. P. 183–199.

12. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Spinger, 2012. 508 p.

13. Hayrer E., Nersett S., Vanner G.. Reshenie obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. M.: Mir, 1990. 512 p. [in Russian]

14. Andriy Oliynyk, Eugene Oliynyk, Olexandr Pyptiuk, Róża Dzierżak, Małgorzata Szatkowska, Svetlana Uvaysova, Ainur Kozbekova. The human body metabolism process mathematical simulation based on Lotka-Volterra model. Proc. SPIE 10445, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2017 104453L (7 August 2017); doi: 10.1117/12.2280972. 7 p.

15. OlIynik A.P., OlIynik E.A. Matematichne modelyuvannya protsesIv obmInu rechovin v organIzmI lyudini ta yogo programna realIzatsIya. Metodi ta priladi kontrolyu yakostI. 2017. No 1(38). P. 112-118. [in Ukrainian]

16. Oliynik E. A., Goy T. P. Matematicheskoye modelirovaniye epidemiologicheskikh protsessov s pomoshchyu differentsialnykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom. Materialy Mezhdunar. molodezhnogo simpoziuma «Sovremennyye problemy matematiki. Metody. modeli. prilozheniya». 17–20 noyab. 2015 g. Voronezh : FGBOU VPO «VGLTA». 2015. P. 34–37. [in Russian]